Espace de Bergman du disque unité

Théorème : On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{B}^2(\mathbb{D}) = \mathcal{H} \cap L^2(\mathbb{D})$. On munit $\mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ du produit hermitien $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{D}} f\bar{g}$. Alors $(\mathcal{B}^2(\mathbb{D}), ||.||)$ est un Hilbert, où $||.||$ est la norme qui découle du produit hermitien.

Proposition : On note $e_n = z \mapsto \sqrt{\dfrac{n+1}{\pi}} z^n$ pour tout $n \geq 0$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{B}^2(\mathbb{D})$.

Lemme : Si K est compact de $\mathbb{D}$ et $f \in \mathcal{B}^2(\mathbb{D})$,

$$||f||_{\infty,K} \leq \frac{||f||}{\sqrt{\pi}\mathrm{d}(K, \mathbb{S}^1)}.$$

Preuve du lemme : Soit K un compact de $\mathbb{D}$ et $f \in \mathcal{B}^2(\mathbb{D})$. Soit $a \in K$. Dans la suite on notera $d := \mathrm{d}(K, \mathbb{S}^1)$. Il existe $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset \mathbb{D}$. Comme f est holomoporphe sur $\mathbb{D}$ elle développable en série entière sur $\overline{B(a,r)}$. On peut alors écrire $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-a)^k$ sur $\overline{B(a,r)}$. Comme la série converge absolument on peut intervertir somme et intégrale de sorte que l'on ait :

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{B(a,r)}} f(z)\mathrm{d}z &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{\overline{B(a,r)}} (z-a)^k \mathrm{d}z \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_0^r \int_0^{2\pi} (a + \rho e^{i\theta} - a)^k \rho \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho \text{ (On passe en coordonnées polaires)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_0^r \rho^{k+1} 2\pi \delta_{0,k} \mathrm{d}\rho \\
&= a_0 r^2 \pi = f(a) r^2 \pi
\end{aligned}$$

Comme f est intégrable par l'inégalité de Hölder (L^2 sur un ensemble de mesure finie implique L^1 en écrivant $f = f \times 1$), le théorème de convergence dominée nous donne la convergence suivante :

$$\int_{\overline{B(a,r)}} f(z)\mathrm{d}z \underset{r \to \mathrm{d}(K,\mathbb{S}^1)}{\longrightarrow} \int_{\overline{B(a,d)}} f(z)\mathrm{d}z.$$

On a ainsi $f(a) = \dfrac{1}{\pi d} \displaystyle\int_{\overline{B(a,d)}} f(z)\mathrm{d}z$. Ceci étant vrai pour tout $a \in K$ on en déduit le lemme car

$$||f||^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \mathrm{d}z \geq \int_{\overline{B(a,d)}} |f(z)|^2 \mathrm{d}z \geq |\int_{\overline{B(a,d)}} f(z)^2 \mathrm{d}z|^2 \geq \frac{1}{\int_{B(a,d)} \mathrm{d}z} |\int_{\overline{B(a,d)}} f(z)\mathrm{d}z|^2 \geq \pi d |f(a)|^2$$

où les dernières inégalités viennent de Hölder. $\square$

Preuve du théorème : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}^2(\mathbb{D})$. Grâce au lemme on sait que pour tout compact $K\subset\mathbb{D}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}),||.||_\infty)$ qui est complet. On peut donc se donner une fonction f_K qui est limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}),||.||_\infty)$. Quitte à faire croître nos compacts de sorte que l'on ait $\mathbb{D}=\cup K_n$ on peut se donner une fonction f qui est limite simple des f_n (on peut l'écrire proprement, pour montrer que tous les f_{K_n} coïncident etc. mais c'est un peu long). Par le théorème de Weierstrass on sait que f est holomorphe (convergence uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions holomorphes). Comme f est continue elle est en particulier L^2 donc elle est bien dans $\mathcal{B}^2(\mathbb{D})$. Il reste à montrer qu'elle est bien limite pour la norme $||.||$.

Comme L^2 est complet pour la norme $||.||$ on peut se donner une fonction g telle que $||f_n-g||\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Par le théorème de Riesz-Fischer on peut se donner une sous-suite convergente de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement presque partout vers g et donc par "unicité" de la limite il vient alors que $f=g$ presque partout donc en particulier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en norme $||.||$. $\square$

Preuve de la proposition : La partie orthonormale se fait sans soucis, il faut juste l'écrire (très pédant d'écrire ça mais j'ai juste un peu la flemme !).

Montrons que c'est une famille totale. Pour ce faire on va montrer que $\overline{\text{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})}^\perp=\{0\}$ (cf mon développement sur le théorème de projection sur un convexe fermé pour avoir l'équivalence). Soit donc f dans $\overline{\text{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})}^\perp$. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\langle e_n,f\rangle=0$. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ elle est développable en série entière sur $\mathbb{D}$ avec convergence normale sur tout compact. On peut donc écrire $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k$ pour tout z dans $\mathbb{D}$. Le théorème de convergence dominée dit alors que l'on a

$$\langle e_n,f\rangle=\lim_{r\to1}\int_{\overline{B(0,r)}}f(z)\overline{e^n(z)}\mathrm{d}z.$$

De plus, la convergence absolue sur tout compact nos permet d'intervertir série/intégrale de sorte que

$$\int_{\overline{B(0,r)}}f(z)\overline{e^n(z)}\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_{\overline{B(0,r)}}z^{k-n}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}a_n2\pi\frac{r^{2n+2}}{2n+2}$$

d'où $\langle e_n,f\rangle=a_n\sqrt{\dfrac{\pi}{n+1}}=0$ et donc $f=0$.$\square$

Remarques importantes :

- Il faut être un minimum au courant des démos des différents théorème d'analyse complexes utilisés
- Écrivez bien les parties de la preuve que j'ai laissé un peu floues, c'est pas possible de le faire en impro le jour j
- L'équivalence entre $\overline{F}^\perp=\{0\}$ et F dense dans un Hilbert n'est pas si triviale que ça en fonction de ce que vous supposez connue donc checker ça
- Il y a beaucoup de convergence dominée cachée, attention